ÜBER EIN

FLÄCHENNETZ

ZWEITER ORDNUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

MIT

GENEHMIGUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

KÖNIGL. UNIVERSITÄT BRESLAU

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

~~SONNABEND~~ DEN XX~~VIII~~. OCTOBER MDCCCLXXVI

MITTAGS XII UHR

IN DER AULA LEOPOLDINA ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

VOM VERFASSER

EMIL TOEPLITZ

AUS LISSA (POSEN)

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

GEGEN DIE HERREN

GUSTAV WESTPHAL, DR. PHIL. PAUL TRIPPKE, CAND. RER. NAT.

MAX RAUHUT, STUD. HIST.

LEIPZIG

DRUCK VON C. G. NAUMANN.

HERRN PROFESSOR DR. J. ROSANES

ALS ZEICHEN DER HOCHACHTUNG UND DANKBARKEIT

UND

SEINEM LIEBEN VATER

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Hesse hat seinen Untersuchungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung*) die eindeutige Abbildbarkeit der Kegelspitzencurve eines beliebigen Flächennetzes zweiter Ordnung auf eine ebene Curve vierter Ordnung zu Grunde gelegt und zeigte**), dass beide — Flächennetz und Curve — gleichzeitig ganz allgemeiner Natur sind. Von dieser Beziehung Gebrauch machend hat Frahm in einer kurzen Notiz***) die von Salmon in seiner Raumgeometrie†) für immer möglich gehaltene Darstellbarkeit dreier quadratischer quaternärer Formen als Summen derselben fünf Quadrate einer näheren Untersuchung unterzogen; aus dem Factum, dass die Hessesche Abbildung der Kegelspitzencurve eines durch derartige Formen repräsentirten Flächennetzes eine Curve vierter Ordnung von besonderer Art ist, zieht er den Schluss, dass auch zwischen den Flächen des Netzes eine gewisse Beziehung bestehen muss, falls jene Darstellung möglich sein soll. Es tritt hierbei noch der eigenthümliche Umstand zu Tage, dass die Darstellung, sobald diese Beziehung Statt hat, nicht bloss auf einfache, sondern auf unendlich vielfache Weise geschehen kann. Unter Zuhülfenahme des Sylvester-Clebsch'schen Satzes ††) von der Darstellbarkeit der allgemeinen cubischen quaternären Form als Summe von fünf Cuben ergab sich daraus der weitere Satz: „Drei Flächen zweiter Ordnung können entweder (im Allgemeinen) gar nicht oder auf zweifach unendlich viele Arten als Polaren einer Fläche dritter Ordnung angesehen werden."

Der kurz angedeutete, indirecte Weg, auf dem Frahm zu diesem interessanten Resultate gelangt ist, soll im Folgenden durch eine ganz directe,

---

*) Hesse, Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Crelle J. Bd. 49. pp. 279—332.

**) Ibid. pag. 284.

***) Frahm, Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung. Math. Ann. VII. pp. 635—638.

†) Salmon-Fiedler, Raumgeometrie. 1. Aufl. Bd. II. pag. 633; 2. Aufl. Bd. I. pag. 166 u. pag. 282.

††) Ausführliche Darlegung und Geschichte dieses Satzes findet sich bei Gordan: über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. V. pp. 341—377; ebenso bei Salmon-Fiedler, a. a. O. 2. Aufl. Bd. II. Cap. V. Einen neuen Beweis hat Reye (Borch. J. Bd. 78. pp. 114—122) geliefert.

rein algebraische Betrachtungsweise ersetzt werden. Während FRAHM zunächst die Frage untersucht, wenn drei quadratische, quaternäre Formen als Summen derselben fünf Quadrate darstellbar sind, und später erst zeigt, dass sie unter derselben Bedingung sich als Polarflächen von Flächen dritter Ordnung interpretiren lassen, bietet sich der umgekehrte Weg für die algebraische Behandlung als der bequemere dar. Die Combinante, deren Verschwinden das von den drei Flächen gebildete Netz als Polarflächennetz einer Fläche dritter Ordnung characterisirt, zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit aus; ihr Quadrat lässt sich als eine sogenannte Determinante gauche symétrique darstellen, und hieraus erklärt sich dann in sehr einfacher Weise, dass die aufgestellte Bedingung entweder von keiner oder einer unendlichen Anzahl von Flächen zweiter Ordnung erfüllt wird. — Die Gleichung der Flächen dritter Ordnung, deren Polaren die drei gegebenen Flächen zweiter Ordnung sind, wird ganz direct hergestellt.

Schliesslich ergiebt sich ein neuer Beweis des erwähnten SYLVESTER-CLEBSCH'schen Satzes.

§ 1.

In der nachstehenden Arbeit werden folgende, übliche Bezeichnungen benutzt werden. Unter $x_i, y_i, z_i, t_i, \ldots, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots (i = 1, 2, 3, 4)$; $u_i, v_i, w_i, \ldots, p_i, q_i, r_i$ sollen die homogenen Coordinaten von Puncten, resp. Ebenen, unter u_x der Ausdruck $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$ verstanden werden. Ferner soll zur Abkürzung die Determinante

$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = (a\,b\,c\,d)$ gesetzt werden; $(b\,c\,d)_i$ sei die Unterdeterminante, die zu a_i adjungirt ist, so dass $(a\,b\,c\,d) = \sum_i a_i (b\,c\,d)_i$ ist, wo sich die Summation, wie im Folgenden überhaupt, über die Werthe 1, 2, 3, 4 des bezeichneten Index erstreckt. Endlich werde $(a_i b_k - a_k b_i) = (a\,b)_{ik}$ gesetzt.

Offenbar ist identisch:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_\xi & u_\eta & u_\zeta \\ x_1 & y_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ x_2 & y_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ x_3 & y_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ x_4 & y_4 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. i. nach der eingeführten Bezeichnungsweise:

I) $u_x (\xi\eta\zeta y) - u_y (\xi\eta\zeta x) = u_\xi (x\eta\zeta y) + u_\eta (x\zeta\xi y) + u_\zeta (x\xi\eta y).$

Zwischen den sechs zweigliederigen Determinanten $(a\,b)_{ik}$ besteht folgende (dieselben auch als solche characterisirende) Identität:

II) $(a\,b)_{12} (a\,b)_{34} + (a\,b)_{13} (a\,b)_{42} + (a\,b)_{14} (a\,b)_{23} = 0.$

Setzt man $u_i = (x\,y\,z)_i$ so wird

III) $(u\,a\,b\,c) = \sum_i (a\,b\,c)_i (x\,y\,z)_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_x b_y c_z$

und in ähnlicher Weise für $(u\,v)_{ik} = (x\,y)_{i'k'}$, wo i, k, i', k' durch eine

gerade Anzahl von Permutationen je zweier Nummern aus 1, 2, 3, 4 hervorgehen soll,

$$\text{IV)}\quad (abuv) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Für Formen höheren Grades wird zumeist von der symbolischen Bezeichnung Gebrauch gemacht werden.

§ 2.

Es erscheint zweckmässig, die Lösung des folgenden, einfachen Problems vorauszuschicken, zumal ich es nur kurz und nicht vollständig an einer einzigen Stelle*) behandelt gefunden habe.

Es sind drei beliebig im Raume gelegene Ebenen

$$p_x = 0, \quad q_x = 0, \quad r_x = 0$$

und drei ihnen resp. zugeordnete Puncte ξ, η, ζ *gegeben; gesucht wird diejenige Oberfläche zweiter Ordnung, zu denen sie als Pole und Polaren gehören.*

Da eine Ebene durch drei Puncte bestimmt ist, vertreten ein Pol und seine Polare die Stelle von drei conjugirten Punctepaaren; die Aufgabe verlangt demnach, eine Oberfläche zweiter Ordnung zu finden, zu der neun gegebene Punctepaare conjugirt sind, und muss daher wenigstens eine Lösung zulassen**). In der That wird ihr durch die aus der doppelt gerechneten, durch ξ, η, ζ gelegten Ebene bestehenden Oberfläche zweiter Ordnung genügt; denn bezüglich einer in eine Doppelebene degenerirenden Fläche zweiter Ordnung hat jeder Punct in ihr jede beliebige Ebene zur Polare. Dass diese ganz interesselose und daher als uneigentlich zu bezeichnende Lösung im Allgemeinen die einzige ist, erkennt man sofort; denn soll eine eigentliche, die Aufgabe befriedigende Fläche zweiter Ordnung existiren, so muss es in der durch ξ, η, ζ gehenden Ebene einen Kegelschnitt geben, in Bezug auf den ξ, η, ζ die Schnittgeraden dieser Ebene mit resp. $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu Polaren haben***); dazu ist aber bekanntlich nothwendig, dass ξ, η, ζ und diese drei Geraden perspectivisch liegende Dreiecke bilden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Soll aber auch eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung der Aufgabe genügen, so müssen die neun Punctepaare auch dieser conjugirt sein und können daher†) höchstens eine achtgliederige Gruppe bilden; dann befriedigen die unendlich vielen Flächen des durch die uneigentliche und eigentliche Fläche definirten Büschels die gestellte Aufgabe.

Für die Existenz einer eigentlichen Lösung reicht eine einzige Bedingung hin; das vorliegende Problem kann nämlich auch so formulirt werden:

Die Coefficienten einer quadratischen quaternären Form a_x^2 und drei Grössen π, $\varkappa$, ϱ sollen aus den Identitäten

---

*) Paul Serret, Géom. de direction; Paris 1869. pag. 182.

**) hierfür vgl. Rosanes, Ueber ein Princip der Zuordnung etc. Borch. J. Bd. 76.

***) cf. Serret a. a. O.

†) cf. Rosanes, a. a. O.

$$\text{A)} \quad a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \varkappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x$$

bestimmt werden, die für jedes x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) zu erfüllen sind.

Hieraus ergeben sich sofort folgende drei Gleichungen:

$$\text{B)} \quad \varkappa q_\zeta = \varrho r_\eta, \quad \varrho r_\xi = \pi p_\zeta, \quad \pi p_\eta = \varkappa q_\xi,$$

in denen von den Unbekannten nur noch π, $\varkappa$, ϱ und zwar homogen und linear vorkommen. Im Allgemeinen haben sie daher nur die Lösung $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $\varrho = 0$; dann erfordern die Gleichungen A), dass ξ, η, ζ Doppelpuncte der Fläche $a_x^2 = 0$ sind; da die Puncte ξ, η, ζ nicht in einer Geraden liegen sollen, so muss $a_x^2 = 0$ die durch ξ, η, ζ gehende, doppelt gedachte Ebene darstellen.

Um zu einer eigentlichen Lösung zu gelangen, ist daher wenigstens die Annahme erforderlich, dass die Determinante der Gleichungen B) verschwinde, d. i.

$$\text{C)} \quad p_\eta q_\zeta r_\xi - p_\zeta q_\xi r_\eta = 0,$$

oder geometrisch ausgedrückt, dass das Dreiflach $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ und das Dreieck ξ, η, ζ perspectivisch liegen; dann ergeben sich aber die Verhältnisse $\pi : \varkappa : \varrho$ in eindeutiger Weise.

Diese Bedingung reicht aber auch für die Existenz einer eigentlichen Lösung hin; denn es kann eine solche sofort direct hergestellt werden. Zu diesem Zwecke möge zunächst der Form a_x^2 eine eigenthümliche Gestalt gegeben werden, in der ihre Coefficienten hauptsächlich nur in drei Polaren von ihr auftreten. Es ist nämlich nach I):

$$a_x^2 (\xi\eta\zeta y) = a_x a_\xi (x\eta\zeta y) + a_x a_\eta (x\zeta\xi y) + a_x a_\zeta (x\xi\eta y) + a_x a_y (\xi\eta\zeta x) \text{ u.}$$

$$a_x a_y (\xi\eta\zeta z) = a_y a_\xi (x\eta\zeta z) + a_y a_\eta (x\zeta\xi z) + a_y a_\zeta (x\xi\eta z) + a_y a_z (\xi\eta\zeta x),$$

woraus sich ergiebt:

$$a_x^2 (\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = [a_x a_\xi (x\eta\zeta y) + a_x a_\eta (x\zeta\xi y) + a_x a_\zeta (x\xi\eta y)] (\xi\eta\zeta z)$$
$$+ [a_y a_\xi (x\eta\zeta z) + a_y a_\eta (x\zeta\xi z) + a_y a_\zeta (x\xi\eta z)] (\xi\eta\zeta x) + a_y a_z (\zeta\eta\zeta x)^2.$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die durch folgende Gleichung gegebene Form a_x^2 den Gleichungen A) genügen muss:

$$\text{D)} \quad a_x^2 (\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = [\pi p_x (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x (x\zeta\xi y) + \varrho r_x (x\xi\eta y)] (\xi\eta\zeta z)$$
$$+ [\pi p_y (x\eta\zeta z) + \varkappa q_y (x\zeta\xi z) + \varrho r_y (x\xi\eta z)] (\xi\eta\zeta x),$$

wo y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) ganz beliebige Grössen und π, $\varkappa$, ϱ aus den Gleichungen B) zu bestimmen sind. Davon überzeugt man sich auch leicht ganz direct; denn durch Polarisation ergiebt sich:

$$2 a_x a_\xi (\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) = [\pi p_\xi (x\eta\zeta y) + \varkappa q_\xi (x\zeta\xi y) + \varrho r_\xi (x\xi\eta y)] (\xi\eta\zeta z)$$
$$+ \pi p_x (\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z) + \pi p_y (\xi\eta\zeta z)(\xi\eta\zeta x)$$

und dies ist, da π, $\varkappa$, ϱ den Gleichungen B) genügen, wenn überdies von der Identität I) Gebrauch gemacht wird:

$= 2\pi p_x (\xi\eta\zeta y)(\xi\eta\zeta z)$, also in der That $a_x a_\xi = \pi p_x$, ebenso $a_x a_\eta = \varkappa q_x$, $a_x a_\zeta = \varrho r_x$, w. z. b. w.

Es entsteht die Frage nach der allgemeinsten Lösung; ist A_x^2 irgend eine solche und a_x^2 die in D) dargestellte, so ist

$$A_x A_\xi = \pi' p_x, \quad A_x A_\eta = \varkappa' q_x, \quad A_x A_\zeta = \varrho' r_x;$$
$$a_x a_\xi = \pi p_x, \quad a_x a_\eta = \varkappa q_x, \quad a_x a_\zeta = \varrho r_x,$$

wo π, $\varkappa$, ϱ ebenso, wie π', $\varkappa'$, ϱ' den Gleichungen B) genügen müssen, wesswegen auch $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \lambda$ ist. Setzt man $A_x^2 - \lambda a_x^2 = h_x^2$, so ergeben jene drei Paare von Gleichungen:

$$h_x h_\xi = 0, \quad h_x h_\eta = 0, \quad h_x h_\zeta = 0.$$

und diese: $$h_x^2 = \mu\,(\xi\eta\zeta x)^2.$$

wo μ eine beliebige Zahl ist. Demnach ist jede Lösung unter der Form

$$A_x^2 = \lambda a_x^2 + \mu\,(\xi\eta\zeta x)^2$$

darstellbar.

Hieraus geht hervor, dass dem gestellten Problem unter Annahme der Bedingung C) in allgemeinster Weise durch einen Büschel von Oberflächen zweiter Ordnung genügt wird, die sich sämmtlich längs eines Kegelschnittes in der Ebene $(\xi\eta\zeta x) = 0$ berühren. Ein derartiger Büschel besitzt nur einen Kegel, dessen Gleichung im vorliegenden Falle sofort herzustellen ist. Setzt man nämlich in dem Ausdrucke für a_x^2 die Grössen $z_i = y_i$, so repräsentirt $a_x^2 = 0$ einen Kegel mit der Spitze y, wenn

$$a_x a_y\,(\xi\eta\zeta y) = \pi p_y\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_y\,(x\xi\zeta y) + \varrho r_y\,(x\xi\eta y)$$

für jedes x_i verschwindet, zu welchem Zwecke man nur y als den Schnittpunct der drei Ebenen $p_x = 0$, $q_x = 0$, $r_x = 0$ zu betrachten braucht. Setzt man daher in D) $y_i = z_i = (pqr)_i$, so ergiebt eine einfache Umformung namentlich unter Anwendung der Identität III) als Gleichung des Kegels

$$S_x^2 = \begin{vmatrix} p_\xi & p_\eta & p_\zeta & p_x \\ q_\xi & q_\eta & q_\zeta & q_x \\ r_\xi & r_\eta & r_\zeta & r_x \\ \pi p_x & \varkappa q_x & \varrho r_x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und der allgemeinsten Lösung des Problems kann nun die Form gegeben werden:

$$A_x^2 = \lambda S_x^2 + \mu\,(\xi\eta\zeta x)^2. —$$

Das in diesem §. zur Anwendung gebrachte Verfahren wird sich auch für den eigentlichen Gegenstand gegenwärtiger Arbeit sehr gut verwerthen lassen.

§ 3.

Es sei vorgelegt das Problem: *Unter welcher Bedingung kann man drei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung als Polaren dreier Puncte in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung auffassen? Welches ist diese Fläche dritter Ordnung und wo liegen die Pole?*

Die Oberfläche dritter Ordnung und die drei Puncte sind durch $19 + 9 = 28$ Bedingungen bestimmt; das Problem liefert aber nur 27 Gleichungen, und — insoweit ein solcher Schluss überhaupt berechtigt

ist*) — scheint es unendlich viele Flächen dritter Ordnung zu geben, die der Aufgabe genügen. In Analogie mit dem Probleme des § 2. existiren allerdings, wie auf den ersten Blick zu erkennen ist, auch hier stets Lösungen, nämlich die in irgend eine beliebige, dreifach zu zählende Ebene des Raumes degenerirende Oberfläche dritter Ordnung; gleichzeitig sind als Pole irgend drei Puncte in ihr zu nehmen. Ausser diesen als uneigentlich zu bezeichnenden Lösungen giebt es für eine allgemeine Lage der drei Flächen zweiter Ordnung, wie sich bald ergeben wird, keine.

Algebraisch gefasst lautet das vorliegende Problem: *Stellen*

$$\sum_{i,k} p_{ik} x_i x_k = p_x^2 = p'^2_x = 0,$$
$$\sum_{i,k} q_{ik} x_i x_k = q_x^2 = q'^2_x = 0,$$
$$\sum_{i,k} r_{ik} x_i x_k = r_x^2 = r'^2_x = 0,$$

drei gegebene Flächen zweiter Ordnung dar, so sollen die Coefficienten einer cubischen, quaternären Form a_x^3, sowie die Coordinaten dreier Puncte ζ, η, ζ und drei Constanten π, $\varkappa$, ϱ so bestimmt werden, dass die Gleichungen

$$1) \quad a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2, \quad a_x^2 a_\eta = \varkappa q_x^2, \quad a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$$

von jedem beliebigen Werthsysteme x_1, x_2, x_3, x_4 identisch befriedigt werden.

Mit diesen Identitäten besteht dann zugleich folgende:

$$\lambda\pi p_x^2 + \mu\varkappa q_x^2 + \nu\varrho r_x^2 = \lambda a_x^2 a_\xi + \mu a_x^2 a_\eta + \nu a_x^2 a_\zeta = a_x^2 a_{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta}.$$

Daher werden sich gleichzeitig mit den gegebenen drei Flächen stets alle Flächen des durch dieselben bestimmten Netzes als Polarflächen ein und derselben Fläche dritter Ordnung auffassen lassen; da es nun in einem Oberflächennetze zweiter Ordnung — ausser in einem ganz speziellen Falle — stets unendlich viele Flächen ohne Doppelpunct giebt, so sollen die drei gegebenen als von dieser allgemeinen Art vorausgesetzt werden.

Die in 1) enthaltenen 30 Gleichungen besitzen die Eigenthümlichkeit dass nach der leicht ausführbaren Elimination der Coefficienten von a_x^3. noch 12 Gleichungen zwischen den ξ_i, η_i, ζ_i, π, $\varkappa$, ϱ übrig bleiben, Polarisiren wir nämlich die Identitäten 1) nach einem beliebigen Werthsysteme y_1, y_2, y_3, y_4, so ergeben sich die ferneren Identitäten:

$$a_x a_y a_\xi = \pi p_x p_y, \quad a_x a_y a_\eta = \varkappa q_x q_y, \quad a_x a_y a_\zeta = \varrho r_x r_y$$

und hieraus die folgenden:

$$2) \quad \varkappa q_x q_\zeta = \varrho r_x r_\eta, \quad \varrho r_x r_\xi = \pi p_x p_\zeta, \quad \pi p_x p_\eta = \varkappa q_x q_\xi$$

oder in nichtsymbolischer Form das 12 Gleichungen enthaltende System:

$$2) \quad \varkappa \sum_{\lambda\mu} q_{\lambda\mu} \zeta_\lambda x_\mu = \varrho \sum_{\lambda\mu} r_{\lambda\mu} \eta_\lambda x_\mu,$$
$$\varrho \sum_{\lambda\mu} r_{\lambda\mu} \xi_\lambda x_\mu = \pi \sum_{\lambda\mu} p_{\lambda\mu} \zeta_\lambda x_\mu,$$
$$\pi \sum_{\lambda\mu} p_{\lambda\mu} \eta_\lambda x_\mu = \varkappa \sum_{\lambda\mu} q_{\lambda\mu} \xi_\lambda x_\mu.$$

*) Die Unzuverlässigkeit der blossen Constantenabzählung ist sehr deutlich von CLEBSCH bei der Darstellung einer biquadratischen ternären Form als Summe von fünf Biquadraten (Borch. J. Bd. 59. pag. 143.) hervorgehoben worden. Darauf beruht auch die in der Einleitung erwähnte falsche Annahme SALMONS, dass drei quadratische quaternäre Formen stets gleichzeitig als Summen derselben fünf Quadrate dargestellt werden können.

Die Annahme $\pi = 0$, $\varkappa = 0$, $\varrho = 0$ führt auf die schon erwähnten uneigentlichen Lösungen; die Annahme, dass zwei oder eine von den Grössen, π, $\varkappa$, ϱ verschwinden, erfordert Spezialitäten für das Netz und die Fläche dritter Ordnung, die wegen ihres geringen Interesses von vornherein ausgeschlossen werden sollen; daher wird es hinreichen, π, $\varkappa$, ϱ als von Null verschieden zu betrachten.

Sollen nun die 12 in 2) enthaltenen, in Bezug auf die 12 Grössen ${}^1_{\pi}\xi_i$, ${}^1_{\varkappa}\eta_i$, ${}^1_{\varrho}\zeta_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) linearen und homogenen Gleichungen wenigstens ein gemeinsames Lösungssystem besitzen, so muss ihre Determinante

3)
$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -r_{11} & -r_{12} & -r_{13} & -r_{14} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -r_{21} & -r_{22} & -r_{23} & -r_{24} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -r_{31} & -r_{32} & -r_{33} & -r_{34} & q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -r_{41} & -r_{42} & -r_{43} & -r_{44} & q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \\
r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{11} & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\
r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{21} & -p_{22} & -p_{23} & -p_{24} \\
r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{31} & -p_{32} & -p_{33} & -p_{34} \\
r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{41} & -p_{42} & -p_{43} & -p_{44} \\
-q_{11} & -q_{12} & -q_{13} & -q_{14} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{21} & -q_{22} & -q_{23} & -q_{24} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{31} & -q_{32} & -q_{33} & -q_{34} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_{41} & -q_{42} & -q_{43} & -q_{44} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0$$

sein. Dies ist eine sogenannte Determinante gauche symétrique und zwar geraden Grades und daher ein volles Quadrat*). Wir bezeichnen sie demnach durch Λ'^2; um Λ' selbst zu finden, multipliciren wir sie zweimal mit der symmetrischen Determinante:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4
\end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma\delta)^3;$$

dann ergiebt sich, wenn

$$\sum_{i,k} p_{ik} x_i y_k = P(xy), \quad \sum_{i,k} q_{ik} x_i y_k = Q(xy), \quad \sum_{i,k} r_{ik} x_i y_k = R(xy)$$

gesetzt wird, wiederum eine Determinante gauche symétrique:

*) cf. Baltzer, Determinanten. 4. Aufl. § 5. 8. I.

$$\bigwedge'^2(\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & R(\alpha\alpha) & \cdots & R(\alpha\delta) & -Q(\alpha\alpha) & \cdots & -Q(\alpha\delta) \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & R(\delta\alpha) & \cdots & R(\delta\delta) & -Q(\delta\alpha) & \cdots & -Q(\delta\delta) \\ -R(\alpha\alpha) & \cdots & -R(\alpha\delta) & 0 & \cdots & 0 & P(\alpha\alpha) & \cdots & P(\alpha\delta) \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -R(\delta\alpha) & \cdots & -R(\delta\delta) & 0 & \cdots & 0 & P(\delta\alpha) & \cdots & P(\delta\delta) \\ Q(\alpha\alpha) & \cdots & Q(\alpha\delta) & -P(\alpha\alpha) & \cdots & -P(\alpha\delta) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ Q(\delta\alpha) & \cdots & Q(\delta\delta) & -P(\delta\alpha) & \cdots & -P(\delta\delta) & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Die bisher beliebig gelassenen 16 Grössen α_i, β_i, γ_i, δ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ werden am zweckmässigsten als die Coordinaten des den Flächen $q_x^2 = 0$ und $r_x^2 = 0$ gemeinsamen Systems harmonischer Pole definirt; alsdann ist

$$Q(\alpha\beta) = 0,\ Q(\alpha\gamma) = 0,\ Q(\alpha\delta) = 0,\ Q(\gamma\delta) = 0,\ Q(\delta\beta) = 0,\ Q(\beta\gamma) = 0;$$
$$R(\alpha\beta) = 0,\ R(\alpha\gamma) = 0,\ R(\alpha\delta) = 0,\ R(\gamma\delta) = 0,\ R(\delta\beta) = 0,\ R(\beta\gamma) = 0.$$

Die letzte Determinante reducirt sich dann, wenn man ihre vier letzten Vertikalreihen resp. mit $R(\alpha\alpha)$, $R(\beta\beta)$, $R(\gamma\gamma)$, $R(\delta\delta)$ multiplicirt und zu den entsprechenden der vier mittleren, mit $Q(\alpha\alpha)$ resp. $Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ multiplicirten Verticalreihen addirt, auf eine achtgliederige Determinante. Verfährt man nun mit dieser in ähnlicher Weise, indem man die ersten vier Horizontalreihen resp. mit $Q(\alpha\alpha)$, $Q(\beta\beta)$, $Q(\gamma\gamma)$, $Q(\delta\delta)$ und die letzten vier mit $R(\alpha\alpha)$, $R(\beta\beta)$, $R(\gamma\gamma)$, $R(\delta\delta)$ multiplicirt und diese entsprechend zu jenen addirt, so ergiebt sich endlich eine viergliederige Determinante und zwar wiederum gauche symétrique, nämlich, wenn $Q(xx) = Q(x)$, $R(xx) = R(x)$ gesetzt wird:

$$\bigwedge'^2(\alpha\beta\gamma\delta)^6 = \begin{vmatrix} 0 & P(\alpha\beta)\,[Q(\alpha)\,R(\beta) - R(\alpha)\,Q(\beta)] \\ P(\beta\alpha)\,[Q(\beta)\,R(\alpha) - R(\beta)\,Q(\alpha)] & 0 \\ P(\gamma\alpha)\,[Q(\gamma)\,R(\alpha) - R(\gamma)\,Q(\alpha)] & P(\gamma\beta)\,[Q(\gamma)\,R(\beta) - R(\gamma)\,Q(\beta)] \\ P(\delta\alpha)\,[Q(\delta)\,R(\alpha) - R(\delta)\,Q(\alpha)] & P(\delta\beta)\,[Q(\delta)\,R(\beta) - R(\delta)\,Q(\beta)] \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} P(\alpha\gamma)\,[Q(\alpha)\,R(\gamma) - R(\alpha)\,Q(\gamma)] & P(\alpha\delta)\,[Q(\alpha)\,R(\delta) - R(\alpha)\,Q(\delta)] \\ P(\beta\gamma)\,[Q(\beta)\,R(\gamma) - R(\beta)\,Q(\gamma)] & P(\beta\delta)\,[Q(\beta)\,R(\delta) - R(\beta)\,Q(\delta)] \\ 0 & P(\gamma\delta)\,[Q(\gamma)\,R(\delta) - R(\gamma)\,Q(\delta)] \\ P(\delta\gamma)\,[Q(\delta)\,R(\gamma) - R(\delta)\,Q(\gamma)] & 0 \end{vmatrix}.$$

Für eine solche lässt sich aber die Quadratwurzel sofort nach der einfachen Formel $\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2$ herstellen; es wird

$$\begin{aligned} \bigwedge'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 = {} & P(\alpha\beta)\,P(\gamma\delta)\,[Q(\alpha)\,R(\beta) - R(\alpha)\,Q(\beta)]\,[Q(\gamma)\,R(\delta) - R(\gamma)\,Q(\delta)] \\ & + P(\alpha\gamma)\,P(\delta\beta)\,[Q(\alpha)\,R(\gamma) - R(\alpha)\,Q(\gamma)]\,[Q(\delta)\,R(\beta) - R(\delta)\,Q(\beta)] \\ & + P(\alpha\delta)\,P(\beta\gamma)\,[Q(\alpha)\,R(\delta) - R(\alpha)\,Q(\delta)]\,[Q(\beta)\,R(\gamma) - R(\beta)\,Q(\gamma)] \end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\begin{aligned} = {} & [Q(\alpha)\,Q(\beta)\,R(\gamma)\,R(\delta) + Q(\gamma)\,Q(\delta)\,R(\alpha)\,R(\beta)]\,[P(\alpha\delta)\,P(\beta\gamma) - P(\alpha\gamma)\,P(\delta\beta)] \\ & + [Q(\alpha)\,Q(\gamma)\,R(\delta)\,R(\beta) + Q(\delta)\,Q(\beta)\,R(\alpha)\,R(\gamma)]\,[P(\alpha\beta)\,P(\gamma\delta) - P(\alpha\delta)\,P(\beta\gamma)] \\ & + [Q(\alpha)\,Q(\delta)\,R(\beta)\,R(\gamma) + Q(\beta)\,Q(\gamma)\,R(\alpha)\,R(\delta)]\,[P(\alpha\gamma)\,P(\delta\beta) - P(\alpha\beta)\,P(\gamma\delta)]. \end{aligned}$$

Um nun den Factor $(\alpha\beta\gamma\delta)^3$ wieder zu beseitigen, wird am besten die symbolische Bezeichnung eingeführt; dies giebt:

$$\begin{aligned}\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 = &(q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)\, p_\alpha p'_\beta\, (p_\delta p'_\gamma - p_\gamma p'_\delta)\\ + &(q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)\, p_\alpha p'_\gamma\, (p_\beta p'_\delta - p_\delta p'_\beta)\\ + &(q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)\, p_\alpha p'_\delta\, (p_\gamma p'_\beta - p_\beta p'_\gamma)\end{aligned}$$

oder durch Vertauschung der gleichwerthigen Symbole p und p' und Addition des Resultates:

$$\begin{aligned}4)\ -2\,\Lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)^3 &= (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)\,(p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha)(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma)\\ &+ (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)\,(p_\alpha p'_\gamma - p_\gamma p'_\alpha)(p_\delta p'_\beta - p_\beta p'_\delta)\\ &+ (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)\,(p_\alpha p'_\delta - p_\delta p'_\alpha)(p_\beta p'_\gamma - p_\gamma p'_\beta).\end{aligned}$$

Man bemerke nun, dass in Folge der den Grössen α_i, β_i, γ_i, δ_i verliehenen Bedeutung

$$q_\alpha^2 q_\beta'^2\,(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma) = \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p'_\alpha & p'_\beta & p'_\gamma & p'_\delta \\ q_\alpha^2 & q_\alpha q_\beta & q_\alpha q_\gamma & q_\alpha q_\delta \\ q'_\beta q'_\alpha & q_\beta'^2 & q'_\beta q'_\gamma & q'_\beta q'_\delta \end{vmatrix} = q_\alpha q'_\beta\, \Sigma \pm p_\alpha p'_\beta q_\gamma q'_\delta = \tfrac{1}{2}(q_\alpha q'_\beta - q_\beta q'_\alpha)(pp'\,qq')(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta),$$

$$r_\gamma^2 r_\delta'^2\,(p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha) = \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p'_\alpha & p'_\beta & p'_\gamma & p'_\delta \\ r_\gamma r_\alpha & r_\gamma r_\beta & r_\gamma^2 & r_\gamma r_\delta \\ r'_\delta r'_\alpha & r'_\delta r'_\beta & r'_\delta r'_\gamma & r_\delta'^2 \end{vmatrix} = r_\gamma r'_\delta\, \Sigma \pm p_\alpha p'_\beta r_\gamma r'_\delta = \tfrac{1}{2}(r_\gamma r'_\delta - r_\delta r'_\gamma)(pp'\,rr')(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta),$$

also $q_\alpha^2 q_\beta'^2\, r_\gamma^2 r_\delta'^2\,(p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha)(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma) = \frac{1}{4}(q_\alpha q'_\beta - q_\beta q'_\alpha)(r_\gamma r'_\delta - r_\delta r'_\gamma)(pp'\,qq')(pp'\,rr')(\alpha\beta\gamma\delta)^2$ ist; da sich die übrigen Terme der Formel 4) in ähnlicher Weise umgestalten, nimmt diese, wenn auf beiden Seiten der Factor $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)^2$ fortgelassen wird, die Gestalt an:

$$\begin{aligned}-8\,\Lambda'(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = &(pp'\,qq')\,(pp'\,rr')\\ &[(q_\alpha q'_\beta - q_\beta q'_\alpha)(r_\gamma r'_\delta - r_\delta r'_\gamma) + (q_\gamma q'_\delta - q_\delta q'_\gamma)(r_\alpha r'_\beta - r_\beta r'_\alpha)\\ &+ (q_\alpha q'_\gamma - q_\gamma q'_\alpha)(r_\delta r'_\beta - r_\beta r'_\delta) + (q_\delta q'_\beta - q_\beta q'_\delta)(r_\alpha r'_\gamma - r_\gamma r'_\alpha)\\ &+ (q_\alpha q'_\delta - q_\delta q'_\alpha)(r_\beta r'_\gamma - r_\gamma r'_\beta) + (q_\beta q'_\gamma - q_\gamma q'_\beta)(r_\alpha r'_\delta - r_\delta r'_\alpha)]\end{aligned}$$

$$= (pp'\,qq')\,(pp'\,rr') \begin{vmatrix} q_\alpha & q_\beta & q_\gamma & q_\delta \\ q'_\alpha & q'_\beta & q'_\gamma & q'_\delta \\ r_\alpha & r_\beta & r_\gamma & r_\delta \\ r'_\alpha & r'_\beta & r'_\gamma & r'_\delta \end{vmatrix} = (pp'\,qq')\,(pp'\,rr')\,(qq'\,rr')\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta),$$

oder $8\,\Lambda' = (qr\,q'r')\,(rp\,r'p')\,(pq\,p'q')$.

Setzt man also

$$5)\quad \Lambda = (qr\,q'r')\,(rp\,r'p')\,(pq\,p'q')$$

so ist die Determinante 3) $= \frac{1}{64}\Lambda^2$.

Es besteht nun folgender Satz: Ist die Determinante eines Systems von einer geraden Anzahl linearer, homogener Gleichungen eine gauche symétrique, so besitzt dies entweder — falls dieselbe nicht verschwindet — (ausser dem nichtssagenden, aus lauter Nullen bestehenden) gar kein, oder — falls sie verschwindet — im Allgemeinen zwei von einander linear un-

abhängige*) Auflösungssysteme, also abgesehen von einem Proportionalitätsfactor eine einfache Mannigfaltigkeit solcher.**)

Hieraus folgt, dass die Gleichungen 2) im Allgemeinen keine gemeinsame Lösung haben; ist aber die Bedingung $\Lambda = 0$ erfüllt, so wird ihnen von je einer einfachen Mannigfaltigkeit von Puncten ξ, η, ζ genügt. Die Auflösung derselben ergiebt, wenn P die Discriminante und π_i die Symbole der adjungirten Form von p_x^2 bedeuten:

$$6) \quad \begin{cases} \pi P.\ \eta_i = \varkappa q_\xi\, q_\pi\, \pi_i, \\ \pi P.\ \zeta_i = \varrho r_\xi\, r_\pi\, \pi_i, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$7) \quad q_\pi r_\pi \sum_\lambda (qr)_\pi\, \xi_\lambda = 0.$$

Die Determinante der letzten vier Gleichungen kann sich nur durch einen Factor von Λ^2 unterscheiden, und man kann auch auf diesem Wege Λ auf die Form 5) reduciren. Verschwindet diese, so bleiben nur zwei von den vier Gleichungen von einander linear unabhängig; der Punct ξ und in derselben Weise η und ζ sind daher nur auf je eine Gerade beschränkt, aber in der Weise, dass jedem Puncte der einen Geraden je ein ganz bestimmter Punct der beiden anderen Geraden zugeordnet ist, wie es die Gleichungen 6) verlangen. Diese Geraden sollen ihrer Bedeutung wegen kurz als die Polgeraden der Flächen $p_x^2 = 0$, resp. $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ bezeichnet werden. Die Gleichung der Polgeraden in Liniencoordinaten $(uv)_{\varkappa\lambda}$ ergiebt sich aus 7) ohne Weiteres; für $p_x^2 = 0$ lautet sie $q_\pi r_\pi (qruv) = 0$, und dies ist in der That wegen der Bedingung $\Lambda = 0$ die Gleichung eines speciellen Complexes, d. h. einer Geraden. Allgemeiner ist jeder Oberfläche des Netzes, das durch $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ bestimmt ist, eine Polgerade zugeordnet.***) Dem beliebigen Puncte ξ auf der Polgeraden von $p_x^2 = 0$ entspricht auf jeder Polgeraden ein einziger bestimmter Punct; die Coordinaten des entsprechenden Punctes auf der Polgeraden von $\lambda p_x^2 + \mu q_x^2 + \nu r_x^2 = 0$ sind in Analogie mit den Gleichungen 6) proportional den Grössen:

$$(\lambda p_\xi p_\pi + \mu q_\xi q_\pi + \nu r_\xi r_\pi)\, \pi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nun ist aber allgemein:

$p_x p_\pi u_\pi = p_x\,(pp'p''p''')\,(up'p''p''')$ und dies nach einer der Identität I) analog gebildeten:

$$= (pp'p''p''')\ [u_x\,(pp'p''p''') + p'_x\,(upp''p''') - p''_x\,(upp'p''') + p'''_x\,(upp'p'')],$$

*) D. h. sämmtliche Auflösungs-Systeme setzen sich aus zweien linear zusammen.

**) Zum Beweise dieses Satzes sei bemerkt, dass — wie sich namentlich unter Benutzung von Baltzer a. a. O. § 7, 2 leicht ergiebt — mit einer Determinante gauche symétrique geraden Grades zugleich ihre ersten Unterdeterminanten, die zweiten hingegen im Allgemeinen nicht mehr verschwinden; dies verbinde man mit dem ibid. § 8, 2 angegebenen Satze von Kronecker.

***) Im Falle eines allgemeinen Netzes stellt $q_\pi r_\pi (qruv) = 0$ nur dann eine Gerade dar, wenn $p_x^2 = 0$ ein Kegel des Netzes ist, und zwar ist dies diejenige Gerade, in der sich die Polarebenen der Spitze dieses Kegels in Bezug auf alle Flächen des Netzes schneiden; durch die Bedingung $\Lambda = 0$ ist aber jeder Fläche, auch wenn sie kein Kegel ist, eine Gerade zugeordnet, nämlich die Polgerade.

oder nach geeigneter Vertauschung gleichwerthiger Symbole:

$$= (pp'p''p''') \; [u_x \; (pp'p''p''') \; - \; p_x \; (up'p''p''') \; - \; p_x \; (up'p''p''') \; - \; p_x \; (up'p''p''')]$$

$$= u_x p_\pi^2 \; - \; 3 p_x p_\pi u_\pi, \text{ also}$$

$$p_x p_\pi u_\pi = \tfrac{1}{4} p_\pi^2 . u_x .$$

Daher ist $p_\xi p_\pi \pi_i$ proportional zu ξ_i, ebenso wegen 6) $q_\xi q_\pi \pi_i$ zu η_i und $r_\xi r_\pi \pi_i$ zu ζ_i, und es werden demnach die obigen Coordinaten proportional Ausdrücken von der Form $\lambda' \xi_i + \mu' \eta_i + \nu' \zeta_i$; daraus folgt: Einander entsprechende Puncte auf den Polgeraden des Netzes liegen in ein und derselben Ebene. (Ebenso wird klar, dass einander entsprechende Puncte auf denjenigen Polgeraden, die einem aus dem Netze herausgenommenen Büschel entsprechen, auf ein und derselben Geraden liegen.) Durchläuft ein Punct eine Polgerade, so beschreiben die entsprechenden Puncte projectivische Punctreihen; die Ebenen, in denen einander entsprechende Puncte liegen, umhüllen daher gleichzeitig eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung, deren Rückkehrcurve eine Raumcurve dritter Ordnung C_3 ist.*) Es ist dies eine covariante Curve des Netzes, die erst in Folge seiner Eigenthümlichkeit, die Bedingung $\Lambda = 0$ zu befriedigen, zu den covarianten Curven des Netzes hinzutritt.

Der Zusammenhang zwischen den Polgeraden und dieser Raumcurve C_3 wird durch den folgenden, aus den Gleichungen 2) sich sofort ergebenden Satz klar: Ist ξ ein Punct der zu $p_x^2 = 0$ gehörigen Polgeraden und ξ' der Schnittpunct der Polarebenen von ξ in Bezug auf die Flächen des Netzes, so ist die Polare von ξ' bezüglich $p_x^2 = 0$ eine Schmiegungsebene der Raumcurve C_3 und zwar diejenige, die durch ξ geht; durchläuft daher ξ die Polgerade, so umhüllt gleichzeitig diese Polare die Raumcurve C_3.

Schliesslich möge noch eine Interpretation der Gleichungen 2) erwähnt werden; multiplicirt man diese nach der Reihe mit drei beliebigen Constanten A, B, Γ und addirt, so ergiebt sich

$\pi p_{(\Gamma\eta - B\zeta)} p_x + \varkappa q_{(A\zeta - \Gamma\xi)} q_x + \varrho r_{(B\xi - A\eta)} r_x = 0$; demnach haben die drei Ebenen $p_{(\Gamma\eta - B\zeta)} p_x = 0$, $q_{(A\zeta - \Gamma\xi)} q_x = 0$, $r_{(B\xi - A\eta)} r_x = 0$ eine Gerade gemein, woraus der Satz folgt: Sind ξ, η, ζ drei Puncte, die den Gleichungen 2) genügen, und trifft eine Gerade das von ihnen gebildete Dreiseit in drei Puncten und zwar die Gerade $(\eta\zeta)$ in α, $(\zeta\xi)$ in β und $(\xi\eta)$ in γ, so haben die Polaren von α, β, γ in Bezug auf $p_x^2 = 0$, resp. $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ wenigstens eine Gerade gemein.

§ 4.

Im vorigen § hat sich die Bedingung $\Lambda = 0$ als eine für die Existenz eigentlicher Lösungen des Problems nothwendige herausgestellt. Sie ergab sich als solche bei der nunmehr vollständig durchgeführten Auflösung der

*) Setzen wir $p_x q_x r_x (pqru) = l_x^3 u_\lambda$ und sind ξ und ξ' zwei Puncte der Polgeraden von p_x^2, bezeichnen wir ferner $l_\xi^2 p_\lambda p_x = A_x$, $l_\xi^2 l_{\xi'} p_\lambda p_x = B_x$, $l_\xi l_{\xi'}^2 p_\lambda p_x = C_x$, $l_{\xi'}^3 p_\lambda p_x = D_x$, so ist die Gleichung der Fläche 4. Ordnung $4 (A_x C_x - B_x^2)(B_x D_x - C_x^2) - (A_x D_x - B_x C_x)^2 = 0$ und die Raumcurve C_3 ist dargestellt durch: $A_x : B_x : C_x : D_x = 1 : \lambda : \lambda^2 : \lambda^3$.

Gleichungen 2), die eine Folge der Gleichungen 1) waren. Um nun auch diese und damit das an die Spitze des § 3. gestellte Problem vollständig zu lösen, wäre zweierlei nachzuweisen: einmal, falls die Auflösungen der Gleichungen 2) sämmtlich den Gleichungen 1) genügen sollen, dass die Gleichungen 2) die einzigen zwischen $\pi, \varkappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ bestehenden Gleichungen sind, die sich durch Elimination der Coefficienten von a_x^2 aus den Gleichungen 1) ergeben; dann: wie viel von den Gleichungen 1) zur Bestimmung dieser Coefficienten noch übrig bleiben und von einander unabhängig sind.

Dieser directe Weg für die weitere Behandlung des Problems würde erhebliche Schwierigkeiten bieten, deren uns folgendes einfache, dem des § 2. ganz analoge Verfahren überhebt. Es soll nämlich die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung wirklich hergestellt und dabei nur vorausgesetzt werden, dass die in ihr auftretenden Grössen den Gleichungen 2) genügen; hiermit ist dann der erste Nachweis geliefert; sodann wird mit Hülfe der gewonnenen Lösung die allgemeinste cubische, quaternäre Form angegeben werden, die die Gleichungen 1) befriedigt.

Zunächst möge der allgemeinen cubischen, quaternären Form eine zweckdienliche Gestalt gegeben werden. Die Identität I) liefert folgende identische Gleichungen:

$$a_x^3\,(\xi\eta\zeta y) = a_x^2\,[a_\xi\,(x\eta\zeta y) + a_\eta\,(x\zeta\xi y) + a_\zeta\,(x\xi\eta y)] + a_x^2 a_y\,(\xi\eta\zeta x),$$
$$a_x^2 a_y\,(\xi\eta\zeta z) = a_x a_y\,[a_\xi\,(x\eta\zeta z) + a_\eta\,(x\zeta\xi z) + a_\zeta\,(x\xi\eta z)] + a_x a_y a_z\,(\xi\eta\zeta x),$$
$$a_x a_y a_z\,(\xi\eta\zeta t) = a_y a_z\,[a_\xi\,(x\eta\zeta t) + a_\eta\,(x\zeta\xi t) + a_\zeta\,(x\xi\eta t)] + a_y a_z a_t\,(\xi\eta\zeta x).$$

Wird die erste mit $(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t)$, die zweite mit $(\xi\eta\zeta x)\,(\xi\eta\zeta t)$, die dritte mit $(\xi\eta\zeta x)^2$ multiplicirt und darauf addirt, so resultirt die gewünschte Darstellung von a_x^3, die darauf führt, eine Lösung a_x^2 der Gleichungen 1) in folgender Form zu suchen:

$$\begin{aligned}
&8)\ a_x^3\,(\xi\eta\zeta y)\,(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t) = \\
&\quad [\pi p_x^2\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_x^2\,(x\zeta\xi y) + \varrho r_x^2\,(x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta z)\,(\xi\eta\zeta t) \\
&+ [\pi p_x p_y\,(x\eta\zeta z) + \varkappa q_x q_y\,(x\zeta\xi z) + \varrho r_x r_y\,(x\xi\eta z)]\,(\xi\eta\zeta t)\,(\xi\eta\zeta x) \\
&+ [\pi p_y p_z\,(x\eta\zeta t) + \varkappa q_y q_z\,(x\zeta\xi t) + \varrho r_y r_z\,(x\xi\eta t)]\,(\xi\eta\zeta x)^2.
\end{aligned}$$

In der That erweist sich diese Behauptung auch ganz direct als richtig unter alleiniger Annahme, dass $\pi, \varkappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ein Lösungssystem der Gleichungen 2) ist. Dazu polarisire man nach ξ_i, dann lassen sich aus dem Resultate mit Hülfe der Gleichungen 2) die Symbole q_i und r_i beseitigen, und die Anwendung der Identität I) führt sofort auf $a_x^2 a_\xi = \pi p_x^2$; ebenso ergiebt sich $a_x^2 a_\eta = \varkappa q_x^2$, $a_x^2 a_\zeta = \varrho r_x^2$, w. z. b. w.

In der gewonnenen Lösung 8) sind y_i, z_i, t_i ganz beliebige Grössen, und sie scheint daher eine sehr grosse Mannigfaltigkeit von verschiedenen Formen zu umfassen; ausserdem lassen noch $\pi, \varkappa, \varrho, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ im Wesentlichen eine einfache Mannigfaltigkeit von Werthen zu. Eine ebenfalls schon im § 2. angewendete Schlussweise ergiebt nun aber, dass es überhaupt nur eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen für die Gleichungen 1) giebt. Es sei a_x^2 die in 8) gegebene Lösung und A_x^2 eine beliebige, mit der alleinigen Beschränkung, dass beiden ein und dasselbe, den Gleichungen 2) genügende Werthsystem zu Grunde liegen soll; dann ist:

$$\begin{aligned}
A_x^2 A_\xi &= \pi' p_x^2, & A_x^2 A_\eta &= \varkappa' q_x^2, & A_x^2 A_\zeta &= \varrho' r_x^2; \\
a_x^2 a_\xi &= \pi p_x^2, & a_x^2 a_\eta &= \varkappa q_x^2, & a_x^2 a_\zeta &= \varrho r_x^2,
\end{aligned}$$

worin π', $\varkappa'$, ϱ', ξ_i, η_i, ζ_i und π, $\varkappa$, ϱ, ξ_i, η_i, ζ_i Lösungssysteme von 2) sind; denselben Grössen ξ_i η_i ζ_i entsprechen aber, wie aus 2) sofort zu erkennen ist, Grössen π, $\varkappa$, ϱ, die sich nur um einen allen dreien gemeinsamen Factor ändern können, d. h. $\pi' : \varkappa' : \varrho' = \pi : \varkappa : \varrho$ oder $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \mu$. Setzt man daher $A_x^3 - \mu a_x^3 = h_x^3$, so ergiebt sich aus den obigen Gleichungen hierfür: $h_x^2 h_\xi = 0$, $h_x^2 h_\eta = 0$, $h_x^2 h_\zeta = 0$; d. h. $h_x^3 = 0$ ist eine Fläche mit drei dreifachen Puncten ξ_i, η_i, ζ_i, woraus

$$h_x^3 = \nu\,(\xi\eta\zeta x)^3$$

bei beliebigem ν folgt.

Demnach ist

$$9)\quad A_x^3 = \mu a_x^3 + \nu\,(\xi\eta\zeta x)^3$$

die allgemeinste Lösung von 1), worin ξ_i, η_i, ζ_i irgend ein Lösungssystem von 2) und a_x^3 die particuläre Lösung 8) bedeutet; und da die Gleichungen 2) eine einfache Mannigfaltigkeit solcher Systeme liefern, so existirt im Allgemeinen eine einfache Mannigfaltigkeit von Flächenbüscheln dritter Ordnung, d. i. eine doppelte Unendlichkeit*) von Lösungen des Problems, immer unter der Voraussetzung, dass der Bedingung $\Lambda = 0$ genügt wird.

Für a_x^3 ist in 9) eine beliebige der in 8) enthaltenen Formen zu setzen; es bietet sich hier nicht, wie bei dem Problem im § 2, eine einzige, ausgezeichnete und hinreichend einfache Form dar, die hierzu besonders geeignet wäre. Setzt man in 8) $z_i = t_i = y_i$, so wird:

$$\begin{aligned}10)\quad a_x^2\,(\xi\eta\zeta y)^3 &= [\,\pi p_x^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_x^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_x^2\ (x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta y)^2\\ &+ [\pi p_x p_y\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y\,(x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y\,(x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta y)\,(\xi\eta\zeta x)\\ &+ [\,\pi p_y^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2\ (x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta x)^2.\end{aligned}$$

Dann wird $a_y^3 = 0$, und es stellen daher die in 10) definirten Flächen $a_x^3 = 0$ diejenigen Oberflächen der Schaar 9) dar, die durch den Punct y gehen; für beliebig gelassene y_i vertritt daher 10) die Gleichung 9) vollständig. Aus 10) folgt:

$$\begin{aligned}a_x^2 a_y\,(\xi\eta\zeta y)^2 &= [\pi p_x p_y\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y\,(x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y\,(x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta y)\\ &+ [\,\pi p_y^2\ (x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\ (x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2\ (x\xi\eta y)]\,(\xi\eta\zeta x)\end{aligned}$$

und weiter:

$$a_x a_y^2\,(\xi\eta\zeta y) = \pi p_y^2\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_y^2\,(x\zeta\xi y) + \varrho r_y^2\,(x\xi\eta y).$$

Für $p_y^2 = 0$, $q_y^2 = 0$, $r_y^2 = 0$, d. h. so oft y ein Basispunct des Netzes ist, verschwindet daher $a_x a_y^2$ identisch, und $a_x^3 = 0$ enthält einen Doppelpunkt y. Jede Lösung ξ_i, η_i, ζ_i der Gleichungen 2) liefert demnach — entsprechend den 8 Basispuncten — 8 Flächen 3. Ordnung mit einem Doppelpunct. Der Berührungskegel in einem solchen hat die Gleichung

$$s_x^2 = \pi p_x p_y\,(x\eta\zeta y) + \varkappa q_x q_y\,(x\zeta\xi y) + \varrho r_x r_y\,(x\xi\eta y) = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Identitäten $s_x s_\xi = p_x p_y$, $s_x s_\eta = q_x q_y$, $s_x s_\zeta = r_x r_y$, die den Zusammenhang der Pole mit den Tangenten-

*) Der eine Parameter dieser Schaar tritt im ersten Grade auf, der andere im achten Grade, der sich nicht erniedrigen zu lassen scheint.

ebenen an die Flächen des Netzes in seinen Basispuncten leicht erkennen lassen.

Wie aus 9) hervorgeht, findet zwischen den Flächen des zu einer jeden Lösung ξ_i, η_i, ζ_i gehörigen Büschels eine doppelte Berührung in einer ebenen Curve dritter Ordnung statt; diese liegt in der durch ξ, η, ζ gehenden Ebene und ist diejenige Curve dritter Ordnung, deren Polarkegelschnittnetz identisch ist mit demjenigen Netze, das von jener Ebene aus dem gegebenen Flächennetze zweiter Ordnung ausgeschnitten wird.

Ausser den 8 erwähnten Oberflächen mit einem Doppelpunct und der dreifach gezählten Ebene durch ξ, η, ζ giebt es in jedem einer Lösung ξ_i, η_i, ζ_i entsprechenden Büschel keine Oberfläche mit vielfachem Puncte; denn durch einen solchen müssten auch ihre Polarflächen gehen, also $p_x^2 = 0$, $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ in ihm einen gemeinsamen Punct haben, was nur für die 8 Basispuncte der Fall ist.

Hiermit ist das Problem vollständig gelöst, und es möge nur noch darauf aufmerksam gemacht werden, was jedoch nicht näher ausgeführt werden soll, dass es auch mit Hülfe der Theorie der simultanen, partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung behandelt und umgekehrt als schönes Beispiel für dieselbe verwerthet werden kann.

§ 5.

Um die algebraische Bedeutung der für das behandelte Problem fundamentalen Combinante $\Lambda = (qq'rr')\,(rr'pp')\,(pp'qq')$ klar zu Tage treten zu lassen, soll ihr Zusammenhang mit anderen Combinanten des Netzes aufgesucht werden. Dass Λ in der That eine Combinante ist, ergiebt sich rein algebraisch unmittelbar aus einem Satze von Gordan.*) Gelegentlich und ohne Beweis theilt Frahm**) mit, dass sich sämmtliche Combinanten des Netzes als invariante Bildungen der beiden Combinanten $L = p_x q_x r_x\,(pqru)$ und $M = (qruv)\,(rpuv)\,(pquv)$ darstellen lassen, was sich mittelst eines Verfahrens leicht bewahrheiten lässt, analog einem von Herrn Prof. Rosanes bei ähnlicher Gelegenheit angewendeten.***)

Bekanntlich†) ist jede Combinante der Formen p_x^2, q_x^2, r_x^2 eine Invariante, Covariante, etc. der Form $R = \Sigma \pm p_x^2 q_y^2 r_z^2$. Es braucht also nur gezeigt zu werden, dass sich diese Form R durch die Coefficienten der Formen L und M allein darstellen lässt. Zu diesem Zwecke mögen für die Formen L, M eigene Symbole eingeführt werden, und zwar:

$$11)\quad L = p_x q_x r_x\,(pqru) = l_x^2 u_\lambda$$
$$12)\quad M = (qruv)\,(rpuv)\,(pquv) = (mnuv)^3.\text{††})$$

Durch Polarisation erhalten wir:

$$\alpha)\quad 3\, l_x^2 l_y u_\lambda = (pqru)\,(p_y q_x r_x + q_y r_x p_x + r_y p_x q_x)$$
$$\beta)\quad 3\,(mnuv)\,(m_x n_y - m_y n_x)^2 = (qruv)\,(r_x p_y - r_y p_x)\,(p_x q_y - p_y q_x) + (rpuv)\,(p_x q_y - p_y q_x)\,(q_x r_y - q_y r_x) + (pquv)\,(q_x r_y - q_y r_x)\,(r_x p_y - r_y p_x).$$

*) Gordan, über Combinanten; Math. Ann. Bd. V, p. 116.
**) a. a. O.
***) Math. Ann. Bd. VI, pp. 278 f.
†) Gordan, a. a. O.
††) In Betreff der Zulässigkeit der letzteren symbolischen Darstellung eines Complexes vgl. Clebsch, Math. Ann. Bd. II, pp. 1 ff.

Multipliciren wir α) mit v_μ und wenden rechts die aus I) fliessende Identität an:

$$-v_x(pqru) = p_x(qruv) + q_x(rpuv) + r_x(pquv) - u_x(pqrv),$$

subtrahiren von der so erhaltenen Gleichung die aus ihr durch Vertauschung von u und v entstehende und schliesslich noch die Gleichung β), so ergiebt sich nach einigen Vereinfachungen:

$$\gamma)\ 3l_x^2 l_y(u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - 3(mnuv)(m_x n_y - m_y n_x)^2 = (qruv)(2p_y^2 q_x r_x + p_x^2 q_y r_y) + (rpuv)(2q_y^2 r_x p_x + q_x^2 r_y p_y) + (pquv)(2r_y^2 p_x q_x + r_x^2 p_y q_y).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2 und zieht dann von ihr diejenige Gleichung ab, die aus γ) durch Vertauschung von x und y folgt, so erhält man:

$$13)\ p_y^2 q_x r_x(qruv) + q_y^2 r_x p_x(rpuv) + r_y^2 p_x q_x(pquv) = 2l_x^2 l_y(u_y v_\lambda - v_y u_\lambda) - l_x l_y^2(u_x v_\lambda - v_x u_\lambda) - (m_x n_y - m_y n_x)^2(mnuv).$$

Wird diese Gleichung nach z_i polarisirt und schliesslich $(uv)_{ik} = (zx)_{ik}$ gesetzt, so wird endlich

$$14)\ R = 4l_x l_y l_z(xyz\lambda) + 2(m_y n_z - m_z n_y)(m_z n_x - m_x n_z)(m_x n_y - m_y n_x).$$

Hiermit ist die gewünschte Darstellung geliefert; Λ muss sich daher als Invariante von L und M darstellen lassen; ganz direct erkennt man sofort, dass

$$15)\ \Lambda = (mnm'n')^3$$

ist, wo m', n' neue Symbole für M sind. Die Combinante Λ ist somit auch eine sehr einfache Invariante der Form M und zwar ebenfalls quadratisch in ihren Coefficienten. Ihre Bildungsweise kann einfach dahin angegeben werden: man bilde neben $M = (qruv)(rpuv)(pquv)$ auch M in den Coordinaten $(xy)_{\varkappa\lambda} = (uv)_{\varkappa'\lambda'}$, dann entsteht Λ, wenn die Producte entsprechender Coefficienten beider Formen addirt werden. Die Bedeutung des Verschwindens derartig aus den Coefficienten zweier Formen gleichen Grades mit contragredienten Variabeln gebildeter Invarianten ist z. B. für ternäre, quadratische Formen von Herrn Prof. Rosanes einer eingehenden Behandlung*) unterworfen worden. Bei Complexgleichungen reicht, da eine solche sowohl in Coordinaten $(uv)_{\varkappa\lambda}$, als $(xy)_{\varkappa\lambda}$ geschrieben werden kann, schon eine einzige zur Bildung einer derartigen Invariante hin. Das aus dem Verschwinden derselben resultirende Verhalten eines Complexes scheint bisher einer Untersuchung noch nicht unterworfen worden zu sein; ein linearer Complex wird in diesem Falle zu einem speziellen.

Die geometrische Bedeutung der Gleichung $M = 0$ ist eine zwiefache; einerseits stellt sie, wie das Clebsch'sche Uebertragungs-Princip**) sofort ergiebt, den Inbegriff sämmtlicher Geraden dar, die die Flächen des Netzes in involutorischen Punctreihen schneiden, andererseits den sämmtlicher Tangenten an dieselben.

---

*) Math. Ann. Bd. VI, pp. 264—312; für Formen mit mehreren Variabeln und von beliebigem Grade vgl. Rosanes, Borch. J. Bd. 76.

**) Borch. J. Bd. 59.

Die Formel 13) liefert die Mittel die Form $q_\pi r_\pi (q r u v)$, die gleich Null gesetzt die Polgerade von $p_x^2 = 0$ darstellt, allein durch die Coefficienten von p_x^2 und den Combinanten L und M auszudrücken; hierzu hat man nur die ganz beliebigen Grössen x_i mit den Symbolen π_i zu identificiren. Nun ist aber, wie schon oben gezeigt worden ist, $p_x p_\pi u_\pi = \frac{1}{4} p_\pi^2 . u_x$; ersetzt man hierin x_i durch $(q u v)_i$ und u_i durch q_i, so ergiebt sich

$p_\pi q_\pi (p q u v) = 0$ und ebenso $r_\pi p_\pi (r p u v) = 0$. Daher ergiebt sich aus 13):

$$p_y^2 . q_\pi r_\pi (q r u v) = 2 l_\pi^2 l_y (u_y v_\lambda - u_\lambda v_y) - l_\pi l_y^2 (u_\pi v_\lambda - u_\lambda v_\pi) - (m_\pi n_y - m_y n_\pi)^2 (m n u v),$$

wo y_i willkührliche Grössen sind; hiermit ist die geforderte Darstellung geliefert.

§ 6.

Besonders interessant erweist sich das betrachtete Flächennetz zweiter Ordnung dadurch, dass die Beschränkung, der es unterworfen ist, ebenso hinreichend, als nothwendig für eine andere Forderung ist, die an ein Flächennetz zweiter Ordnung gestellt werden kann. Zwei quadratische, quaternäre Formen lassen sich stets als Summen derselben 4 Quadrate darstellen, und zwar in eindeutiger Weise; es frägt sich, ob ebenso eine gleichzeitige Darstellung von drei quadratischen Formen als Summen derselben 5 Quadrate stets ausführbar ist. Dies ist aber nicht der Fall.

Ist nämlich

$$p_x^2 = \sum_1^5 p_i g_{i\,x}^2, \quad q_x^2 = \sum_1^5 q_i g_{i\,x}^2, \quad r_x^2 = \sum_1^5 r_i g_{i\,x}^2,$$

wo $g_{i\,x} = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + g_{i3} x_3 + g_{i4} x_4$ ist, so verschwindet hierfür $\wedge$ von selbst. Denn durch Einführung der wirklichen Coefficienten dieser canonischen Formen an Stelle der Symbole geht $\wedge$ über in:

$$\wedge = (q q' r r') (r r' p p') (p p' q q') = \Sigma p_\varkappa p_\lambda q_\mu q_\nu r_\varrho r_\sigma (g_\varkappa g_\lambda g_\mu g_\nu) (g_\mu g_\nu g_\varrho g_\sigma) (g_\varrho g_\sigma g_\varkappa g_\lambda)^*),$$

wo die Summation über alle Indices von 1 bis 5 zu erstrecken ist. Dass aber diese Summe verschwindet, ist auf den ersten Blick zu erkennen; es wird dies nämlich für jeden ihrer Terme der Fall sein, in dem zwei Indices gleiche Nummern bedeuten; denn dann verschwindet immer wenigstens eine der drei in jedem Gliede enthaltenen viergliederigen Determinanten; um also nicht zu verschwinden, müsste ein solches 6 verschiedene Indices enthalten; da aber nur über 5 verschiedene Indices verfügt werden kann, verschwinden sämmtliche Terme und somit $\wedge$ selbst.

Aber $\wedge = 0$ ist nicht bloss eine nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingung für die in Rede stehende Darstellbarkeit. Dies zu beweisen, macht insofern mehr Schwierigkeiten, als von dem Satze, dass jede cubische, quaternäre Form sich als Summe von 5 Cuben darstellen

*) Für eine solche Ueberführung vgl. GORDAN: über das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. Bd. V, pp. 365 u. 366.

lässt, nicht Gebrauch gemacht, vielmehr hierfür in dem Folgenden ein neuer Beweis gegeben werden soll.

Ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung durch 5 Quadrate darstellbar $p_x^2 = \sum_1^5 p_i\, g_{ix}^2$, so heisst bekanntlich das von den 5 Ebenen $g_{1x} = 0, \ldots . g_{5x} = 0$ gebildete Pentaeder ein Pentaeder der Fläche $p_x^2 = 0$. Man erhält durch Polarisation $p_x p_y = \sum_1^5 p_i\, g_{ix} g_{iy}$; setzt man hierin an Stelle von y_i die Coordinaten einer Pentaederecke, z. B. die, in der sich $g_{1x} = 0$, $g_{2x} = 0$, $g_{3x} = 0$ schneiden, so ergiebt sich:

$$p_x\,(p\,g_1\,g_2\,g_3) = p_1\,g_{1x}\,(g_1\,g_3\,g_4\,g_5) + p_2\,g_{2x}\,(g_2\,g_3\,g_4\,g_5).$$

Daraus folgt: Die Polare einer Pentaederecke geht durch die ihr gegenüberliegende Kante. — Dieser Satz gestattet die Umkehrung: Hat ein Pentaeder die Eigenschaft, dass die Polaren seiner Ecken in Bezug auf ein und dieselbe Oberfläche zweiter Ordnung durch die gegenüberliegenden Kanten gehen, so ist es ein Pentaeder dieser Fläche. Unter Zugrundelegung der in der Annahme dieses Satzes geforderten Gleichungen $(p\,g_h\,g_i\,g_k)\,(p\,g_l\,g_m\,u) = 0$, wo die Indices die Zahlen 1, ..., 5 in jeder möglichen Reihenfolge bedeuten und die u_i ganz beliebige Grössen sind, lässt sich nämlich p_x^2 namentlich unter Anwendung der Identität I) (§ 1) in höchst einfacher Weise als Summe der 5 mit gewissen Constanten multiplicirten Quadrate g_{ix}^2 darstellen.*)

Hieraus ist klar, dass der geforderte Nachweis geliefert sein wird, wenn gezeigt wird, dass unter der Voraussetzung $\Lambda = 0$ die Flächen des Netzes zweiter Ordnung ein gemeinsames Pentaeder besitzen.

Zu diesem Zwecke werde zunächst ein Hülfssatz bewiesen, der gleichzeitig eine interessante Eigenschaft des betrachteten Netzes liefert; er basirt hauptsächlich auf der Darstellung von Λ, wie sie in der Formel 4) des § 3. gegeben ist; danach kann die Bedingung $\Lambda = 0$ auch ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned}
\alpha)\ & (q_\alpha^2 q_\beta'^2 r_\gamma^2 r_\delta'^2 + q_\gamma^2 q_\delta'^2 r_\alpha^2 r_\beta'^2)\,(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\
+ & (q_\alpha^2 q_\gamma'^2 r_\delta^2 r_\beta'^2 + q_\delta^2 q_\beta'^2 r_\alpha^2 r_\gamma'^2)\,(p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\
+ & (q_\alpha^2 q_\delta'^2 r_\beta^2 r_\gamma'^2 + q_\beta^2 q_\gamma'^2 r_\alpha^2 r_\delta'^2)\,(p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta') = 0,
\end{aligned}$$

wo α, β, γ, δ die Ecken des gemeinschaftlichen Poltetraeders von $p_x^2 = 0$ und $q_x^2 = 0$ bedeuten; ausserdem ist identisch:

$$\begin{aligned}
\beta)\ 0 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p'_\alpha & p'_\beta & p'_\gamma & p'_\delta \\ p_\alpha & p_\beta & p_\gamma & p_\delta \\ p'_\alpha & p'_\beta & p'_\gamma & p'_\delta \end{vmatrix} &= (p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') \\
&+ (p_\alpha p_\gamma' - p_\gamma p_\alpha')(p_\delta p_\beta' - p_\beta p_\delta') \\
&+ (p_\alpha p_\delta' - p_\delta p_\alpha')(p_\beta p_\gamma' - p_\gamma p_\beta').
\end{aligned}$$

Wird ausserdem $(p_\alpha p_\beta' - p_\beta p_\alpha')(p_\gamma p_\delta' - p_\delta p_\gamma') = 0$ vorausgesetzt, so gehen $\alpha)$ und $\beta)$ in folgende Gleichungen über:

---

*) Derartige Darstellungen findet man bei Gordan, Math. Ann. Bd. V. p. 361 f. und bei Rosanes, ibid. Bd. VI. pp. 307 ff. und Borch. J. Bd. 76.

$$(q_\alpha^2 q'^2_\gamma r^2_\delta r'^2_\beta + q^2_\delta q'^2_\beta r^2_\alpha r'^2_\gamma)\,(p_\alpha p'_\gamma - p_\gamma p'_\alpha)\,(p_\delta p'_\beta - p_\beta p'_\delta)$$
$$+ (q^2_\alpha q'^2_\delta r^2_\beta r'^2_\gamma + q^2_\beta q'^2_\gamma r^2_\alpha r'^2_\delta)\,(p_\alpha p'_\delta - p_\delta p'_\alpha)\,(p_\beta p'_\gamma - p_\gamma p'_\beta) = 0,$$
$$(p_\alpha p'_\gamma - p_\gamma p'_\alpha)\cdot(p_\delta p'_\beta - p_\beta p'_\delta) + (p_\alpha p'_\delta - p_\delta p'_\alpha)\,(p_\beta p'_\gamma - p_\gamma p'_\beta) = 0.$$

Beachtet man, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} q^2_\alpha q'^2_\gamma r^2_\delta r'^2_\beta + q^2_\delta q'^2_\beta r^2_\alpha r'^2_\gamma & q^2_\alpha q'^2_\delta r^2_\beta r'^2_\gamma + q^2_\beta q'^2_\gamma r^2_\alpha r'^2_\delta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (q^2_\alpha r^2_\beta - q^2_\beta r^2_\alpha)\,(q'^2_\gamma r'^2_\delta - q'^2_\delta r'^2_\gamma)$$

nicht verschwindet — denn es müssten dann zwei Ecken des Poltetraeders $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zusammenfallen —, so erkennt man als nothwendige Folge dieser beiden Gleichungen:

$$(p_\alpha p'_\gamma - p_\gamma p'_\alpha)(p_\delta p'_\beta - p_\beta p'_\delta) = 0, (p_\alpha p'_\delta - p_\delta p'_\alpha)\,(p_\beta p'_\gamma - p_\gamma p'_\beta) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieses Resultates ist eine sehr einfache. Einem beliebigen Puncte α des Raumes ist nämlich in Bezug auf das Netz ein ganz bestimmter Punct conjugirt, d. i. der Schnittpunct seiner Polarebenen in Bezug auf sämmtliche Flächen des Netzes, dessen Coordinaten sich aus den Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ ergeben; ist aber α die Spitze eines der im Netze vorhandenen Kegel, so haben die drei Ebenen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $r_\alpha r_x = 0$ eine Gerade gemein; den Kegelspitzen des Netzes ist demnach nicht je ein Punct, sondern je eine Gerade conjugirt; dieselben erfüllen bekanntlich eine Raumcurve 6. Ordnung. Die Ecken des Poltetraeders, das den Flächen eines im Netze enthaltenen Büschels gemeinsam angehört, sind gleichzeitig Kegelspitzen des Netzes. Sind nun $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, wie bisher, die Spitzen der in dem Büschel $q_x^2 = 0$, $r_x^2 = 0$ enthaltenen Kegel, so soll die Bedingung angeben werden, unter der sich die conjugirten Geraden zweier derselben, z. B. α und β, treffen; diese erhält man durch Elimination von x_1, x_2, x_3, x_4 aus den vier Gleichungen $p_\alpha p_x = 0$, $q_\alpha q_x = 0$, $p_\beta p_x = 0$, $q_\beta q_x = 0$ zunächst in der Gestalt: $p_\alpha q_\alpha p'_\beta q'_\beta\,(p q p' q') = 0$. Multiplicirt man diese Gleichung mit der im Allgemeinen nicht verschwindenden Determinante $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ und benutzt die in § 3. abgeleitete Gleichung: $q_\alpha q'_\beta\,(p p' q q')\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = q^2_\alpha q'^2_\beta\,(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma)$, so wird, da $q_x^2 = 0$ als ohne Doppelpunct vorausgesetzt werden darf, jene Bedingung identisch mit $p_\alpha p'_\beta\,(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma) = 0$ oder auch

$$(p_\alpha p'_\beta - p_\beta p'_\alpha)\,(p_\gamma p'_\delta - p_\delta p'_\gamma) = 0.$$

Aus dieser für das Treffen der conjugirten Geraden von α und β nothwendigen und hinreichenden Bedingung ergiebt sich für das allgemeine Netz beiläufig der Satz: Schneiden sich die conjugirten Geraden zweier Kegelspitzen, so treffen sich auch die conjugirten Geraden derjenigen zwei Kegelspitzen, die mit jenen zusammen ein Quadrupel bilden. Unter Quadrupel sollen nämlich vier Kegelspitzen des Netzes verstanden werden, die einem seiner Büschel angehören.

Das obige Resultat lässt sich daher nun dahin interpretiren: Erfüllt ein Flächennetz zweiter Ordnung die durch $\Lambda = 0$ dargestellte Bedingung, und treffen sich zwei von den den Puncten eines Quadrupels conjugirten Geraden, so liegen überhaupt sämmtliche, den Puncten dieses Quadrupels conjugirte Geraden in ein und derselben Ebene.

Mit Hülfe dieses Satzes wird es nun leicht sein, die Existenz nicht bloss einer, sondern unendlich vieler Pentaeder, die den Flächen des der Bedingung $\Delta = 0$ unterworfenen Netzes gemeinsam sind, nachzuweisen. Es ist von vornherein klar, dass die Ecken eines solchen Kegelspitzen sein müssen; denn nur diese besitzen die den Pentaederecken nothwendig zukommende Eigenschaft, dass ihre Polarebenen in Bezug auf alle Flächen des Netzes eine Gerade gemein haben.

Für das allgemeine Netz lässt sich nämlich Folgendes leicht beweisen. Sind α, β, γ drei in einer Geraden liegende Kegelspitzen — und solche drei giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit — so treffen sich, allgemein unter G_x die conjugirte Gerade einer Kegelspitze x verstanden, G_α, G_β, G_γ wiederum in einer Kegelspitze Θ, deren conjugirte Gerade G_Θ durch α, β, γ geht. Durch diese drei Geraden lassen sich daher drei Ebenen legen, je eine durch G_β und G_γ, G_γ und G_α, G_α und G_β, die von G_Θ, bez. in den Puncten α, β, γ geschnitten werden. Zwei Kegelspitzen bestimmen (da sie einen Büschel bestimmen) zwei andere, die jene zu einem Quadrupel ergänzen; bilden nun $\beta\,\gamma\,\alpha'\,\alpha''$, $\gamma\,\alpha\,\beta'\,\beta''$, $\alpha\,\beta\,\gamma'\,\gamma''$ je ein Quadrupel, so liegen die Punctepaare $\alpha'\,\alpha''$, $\beta'\,\beta''$, $\gamma'\,\gamma''$ auf der Geraden G_α, resp. G_β, G_γ, so dass z. B. in der durch G_β und G_γ gehenden Ebene die 6 Puncte $\Theta\,\alpha\,\beta'\,\beta''\,\gamma'\,\gamma''$ liegen. Endlich sei noch hervorgehoben, dass auf der conjugirten Geraden einer jeden Kegelspitze wiederum drei Kegelspitzen liegen.

Der analytische Beweis dieser Sätze soll hier seiner Einfachheit halber übergangen werden.*) Die so definirten 10 Puncte $\Theta\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\alpha''\,\beta'\,\beta''\,\gamma'\,\gamma''$ lassen sich im Allgemeinen nicht als Ecken eines Pentaeders auffassen; denn sonst müsste auch das allgemeine Flächennetz ein Pentaeder besitzen; hierdurch würde aber die Bedingung $\Delta = 0$ erfüllt werden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Dagegen soll gezeigt werden, dass die Bedingung $\Delta = 0$ ausreicht, um jene Auffassung zu ermöglichen. Nach dem bewiesenen Hülfssatze werden nämlich, da G_α, G_β, G_γ sich in einem Puncte treffen und $\beta\,\gamma\,\alpha'\,\alpha''$, $\gamma\,\alpha\,\beta'\,\beta''$, $\alpha\,\beta\,\gamma'\,\gamma''$ je ein Quadrupel bilden, folgende drei mal vier Gerade je in einer Ebene liegen:

$$G_\beta\,G_\gamma\,G_{\alpha'}\,G_{\alpha''};\quad G_\gamma\,G_\alpha\,G_{\beta'}\,G_{\beta''};\quad G_\alpha\,G_\beta\,G_{\gamma'}\,G_{\gamma''}$$

In jeder beliebigen Ebene liegen höchstens 6 Kegelspitzen, da diese sämmtlich auf einer Raumcurve 6. Ordnung enthalten sind; da nun ferner auf jeder der 4 Geraden $G_\beta\,G_\gamma\,G_{\alpha'}\,G_{\alpha''}$ drei Kegelspitzen und diese Geraden selbst in einer Ebene sich befinden, in der die 6 Kegelspitzen $\Theta\,\alpha\,\beta'\,\beta''\,\gamma'\,\gamma''$ liegen, so ergiebt sich mit Nothwendigkeit, dass

$$\alpha\,\beta'\,\gamma' \text{ auf } G_{\alpha'} \text{ und } \alpha\,\beta''\,\gamma'' \text{ auf } G_{\alpha''}$$

liegen. Ebenso liegen $\beta\,\gamma'\,\alpha'$ auf $G_{\beta'}$, $\gamma\,\alpha'\,\beta'$ auf $G_{\gamma'}$, $\beta\,\gamma''\,\alpha''$ auf $G_{\beta''}$ und $\gamma\,\alpha''\,\beta''$ auf $G_{\gamma''}$. Hieraus ist nun unmittelbar zu erkennen, dass ebenso wie $\Theta\,\alpha\,\beta'\,\beta''\,\gamma'\,\gamma''$, $\Theta\,\beta\,\gamma'\,\gamma''\,\alpha'\,\alpha''$, $\Theta\,\gamma\,\alpha'\,\alpha''\,\beta'\,\beta''$ auch $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ und $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha''\,\beta''\,\gamma''$ je in einer Ebene liegen, was zu zeigen war.

---

*) Vgl. Sturm, über das Flächennetz zweiter Ordnung; Borch. J. Bd. 70. pp. 212—240.

Die angegebene Construction des Pentaeders enthält ein willkührliches Element, den Punct Θ, der ganz beliebig auf der Kegelspitzencurve gewählt werden kann; daher folgt endlich der Satz:

Drei quaternäre, quadratische Formen lassen sich immer und nur dann als Summen derselben fünf Quadrate (und zwar in einfach unendlich vielfacher Weise) darstellen, wenn sie sich als Polaren ein und derselben cubischen Form auffassen lassen.

Es macht keine Schwierigkeit, zu zeigen, dass dann auch die cubische Form selbst durch die Summe von 5 Cuben sich darstellen lässt; daraus folgt dann aber sofort der Satz:

Jede quaternäre cubische Form lässt sich im Allgemeinen als Summe von 5 Cuben darstellen.

THESEN.

1. Die Geometrie der Lage entbehrt noch einer selbständigen, naturgemässen Begründung.
2. Die Analysis operirt jetzt ebenso sicher mit unendlichen, wie mit endlichen Grössen.
3. Der beste Weg, sich mit der Theorie der elliptischen Functionen bekannt zu machen, ist der historische.
4. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung hat einen rein theoretischen Character und führt noch nicht zu practischen Auflösungs-Methoden.
5. Die objective Existenz von Kräften ist durch Nichts begründet; in der Natur giebt es bloss Bewegungen.
6. Ein sicherer Fortschritt der Psychologie ist erst dann zu erwarten, wenn es gelungen sein wird, quantitative Relationen zwischen psychischen Vorgängen festzustellen.
7. Es ist sehr wichtig für die Psychologie, das Verhältniss des Sprachgebrauchs zum wissenschaftlichen Gebrauch eines Terminus festzustellen.
8. Realschule und Gymnasium sind durch eine einzige Bildungs-Anstalt zu ersetzen.

VITA.

Ich, Emil Toeplitz, bin am 15. October 1852 zu Lissa (Prov. Posen) geboren und bin der älteste Sohn des Gymnasial-Oberlehrers Julius Toeplitz und der Frau Ernestine, geb. Ephraim, jüdischer Religion. Nach mehrjährigem Besuch der Privatschule des Herrn Poper, trat ich Ostern 1864 in die Quinta des kgl. Gymnasiums meiner Vaterstadt ein, das bis vor Kurzem unter der Leitung des Herrn Dir. Prof. Ziegler stand, genoss daselbst den mathematisch-physicalischen Unterricht bei dem Herrn Prof. v. Karwowski und meinem Vater und legte Ostern 1872 die Abiturientenprüfung ab. Hauptsächlich in Folge der vielfachen Anregungen, die ich von meinem Vater empfing, ergriff ich das Studium der Mathematik und Physik und bezog die Universität zu Breslau, wo ich die Vorlesungen der Herren Professoren Bachmann, Dilthey, Dorn, Galle, O. E. Meyer, Geh. R. Neumann, Römer, Rosanes und Schröter hörte. Meinen Aufenthalt an derselben unterbrach ich von Michaelis 1874 bis eben dahin 1875 und besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren Bruhns, Hermann, Leuckart, Ad. Mayer, Carl Neumann, Scheibner, Wiedemann, Zöllner zu Leipzig. Fünf Semester hindurch war ich Mitglied des von den Herren Professoren Meyer und Schröter in Breslau, zwei Semester hindurch des von Herrn Prof. Neumann in Leipzig geleiteten mathematisch-physicalischen Seminars; ausserdem betheiligte ich mich während zweier Semester an den mathematischen Uebungen des Herrn Prof. Rosanes und je ein Semester an denen des Herrn Prof. Mayer und an den philosophischen Uebungen des Herrn Prof. Dilthey.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders aber denjenigen Herren, durch deren persönliche Anleitung meine Studien in so vielfacher Weise gefördert wurden, spreche ich an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank aus. Namentlich dem Interesse, das die algebraisch-geometrischen Vorlesungen des Herrn Prof. Rosanes in mir hervorriefen, sowie dessen freundlichen Rathschlägen verdankt die vorstehende Arbeit ihre Entstehung.